

KỶ THI THỬ CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
GIẢI TOÁN BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

ĐỀ THI THỬ

Thời gian làm bài: 60 phút
(không kể thời gian phát đề)

Môn: Toán (MTCT)

Ngày thi: _____

Năm học: 2025-2026

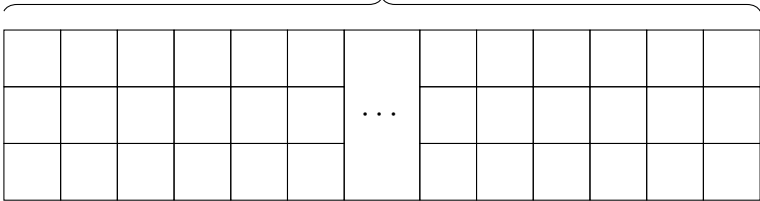
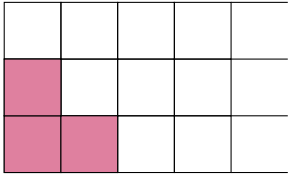
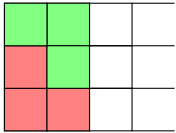
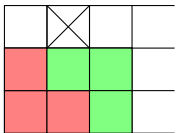
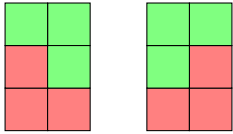
Họ và tên:	Lớp:	Trường:
------------	------	---------

Điểm (bằng số)	Điểm (bằng chữ)	Nhận xét

Chú ý:

- Đề gồm 10 câu với tổng số điểm là 20.
- Thí sinh ghi đáp số vào ô kết quả.
- Các kết quả tính toán ghi đúng; nếu không có chỉ định cụ thể, thì được hiểu là tính chính xác tới **6 (sáu) chữ số thập phân**.

Bài 1. (2 điểm) Cho ba số nguyên a, b, c ($0 \leq a, b, c \leq 9$) sao cho: $\overline{5a5201b26c}$ chia hết cho 2026. $380 \leq 3a^2 + b + 2c^2 \leq 480$. Tính $a^2 + 2b^2 + 3c^2$.	Kết quả: Do $M = \overline{5a5201b26c}$ chia hết cho 2026 nên M chia hết cho 2, dẫn tới $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Ta có $I = 3a^2 + b + 2c^2 \leq 3 \cdot 9^2 + 9 + 2 \cdot 8^2 = 380$ mà theo đề, $380 \leq I$ nên $I = 380$ dẫn tới việc ta chỉ có một bộ a, b, c lần lượt là 9, 9, 8 thỏa mãn. Kết quả là $9^2 + 2 \cdot 9^2 + 3 \cdot 8^2 = 435$.
Bài 2. (2 điểm) Tính tổng các ước dương lẻ của 1678941675.	Kết quả: $1678941675 = 3^6 \times 5^2 \times 17 \times 5419$ Do không có thừa số 2 nên tổng các ước lẻ là: $\prod_{\text{Ước nguyên tố } p, \text{ mũ } k} \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$ Kết quả là: 3305625480.

Bài 3. (2 điểm) Cho đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết $f(x)$ chia $x - 1$ dư 3, $f(x)$ chia $2x - 3$ dư 5, $f(x)$ chia $x - 2$ dư 2 và $f(x)$ chia hết cho $x + 3$. Tính $f(6) \times (a + b + c + d)^2$.	Kết quả: Ta có $f(1), f(\frac{3}{2}), f(2), f(-3)$ lần lượt là 3, 5, 2, 0. Giải hệ phương trình 4 ẩn, ta có kết quả biểu thức là: -3555
Bài 4. (2 điểm) Tìm số tự nhiên N nhỏ nhất có 12 chữ số thỏa N chia 97 dư 33, N chia 41 dư 36, N chia 23 dư 18.	Kết quả: $N = 100000025733$
Bài 5. (2 điểm) Hưng có một bộ xếp hình kích thước 3×2026 gồm các ô vuông như sau: 2026 ô vuông  Hưng quyết định sử dụng các mảnh ghép hình chữ L (như hình dưới) để xếp vào các ô vuông sao cho không có hai mảnh ghép nào đè lên nhau và tất cả các ô vuông phải được xếp kín. Dĩ nhiên là Hưng có thể xoay và lật các mảnh ghép rồi.  Hãy đếm số cách khác nhau mà Hưng có thể xếp các mảnh ghép vào sao cho kín bộ xếp hình. Do kết quả có thể rất lớn nên chỉ cần ghi kết quả khi chia lấy dư cho 20252026.	Kết quả: Nhận thấy rằng ta chỉ có thể đặt các mảnh ghép hình chữ L sát lề theo ý tưởng sau:  Ta không thể đặt theo cách khác mà không tồn tại ít nhất một ô không thể được xếp kín. Ví dụ với một cách đặt khác không hợp lệ:  Dễ thấy ta không có cách nào để xếp vào ô gạch chéo cả. Tương tự với những cách không hợp lệ khác. Do vậy, ta chia bộ xếp hình thành 1013 phần kích thước 3×2, mỗi cách phần có 2 cách đặt là:  Vậy số cách xếp để lấp kín bộ xếp hình là 2^{1013}, chia lấy dư cho 20252026. Kết quả là: 7502606.

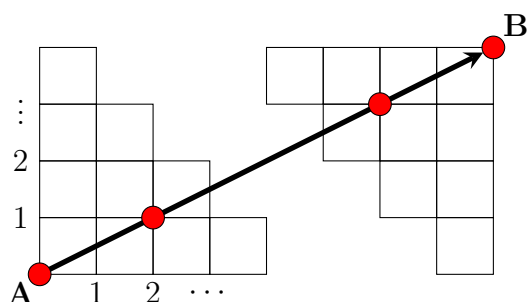
Bài 6. (2 điểm)

Tàu vũ trụ **B** gặp sự cố và phát tín hiệu khẩn cấp. Tàu **A** tại trụ sở nhận được tín hiệu và quyết định bay theo một đường thẳng tới vị trí của B trên **mặt phẳng tọa độ**.

- Tọa độ tàu A: $A(0, 0)$
- Tọa độ tàu B: $B(7367628996, 1364963309)$

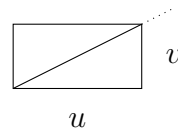
Tuy nhiên, ở mỗi điểm có tung độ và hoành độ là số nguyên lại có quái vật (bao gồm cả vị trí của tàu A, B).

Hãy tính số vị trí có quái vật trên đường di chuyển từ A tới B.

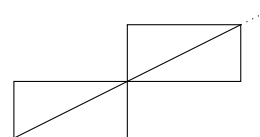


Kết quả:

Xét vùng chữ nhật có độ dài hai cạnh là u, v có 4 đỉnh nguyên sao cho đường chéo của nó không đi qua bất kì điểm nguyên nào nằm hoàn toàn trong vùng đó:



Dễ thấy, ta có thể chia đoạn thẳng từ A tới B thành nhiều đường chéo của các hình chữ nhật như vậy:



Do vậy, u là ước của $|x_A - x_B|$, v là ước của $|y_A - y_B|$. Số điểm nguyên trên đoạn AB là số hình chữ nhật nhiều nhất ghép được, cộng thêm điểm B nữa, chính là:

$$\text{ƯCLN}(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|) + 1. \\ = (7367628996; 1364963309) + 1$$

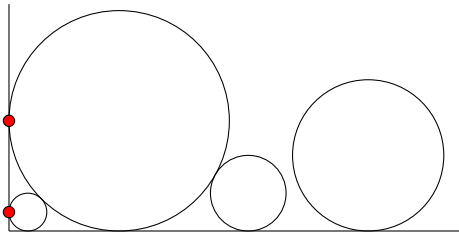
Vậy kết quả bài toán là 20262.

Bài 7. (2 điểm)

Hưng là một người thích sưu tầm những chiếc đĩa cổ hình tròn. Để thuận tiện cho việc trưng bày, Hưng quyết định đặt những chiếc đĩa vào một khung hình chữ nhật có độ dài cạnh thẳng đứng là 2026 cm, do Hưng rất giàu nên không cần phải để tâm tới độ dài cạnh nằm ngang.

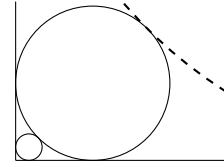
Để tránh làm hư hỏng, *tất cả* các chiếc đĩa được đặt vào phải tiếp xúc với cạnh nằm ngang ở dưới và không được phép giao nhau (có thể tiếp xúc nhau).

Biết bán kính của các chiếc đĩa theo đơn vị cm đều là số nguyên dương. Người ta gọi $\mathcal{B}$ là độ đẹp của bản trưng bày, chính là số lượng tối đa các chiếc đĩa tiếp xúc với một cạnh thẳng đứng của khung sau khi đặt những chiếc đĩa vào. Hãy xác định giá trị của $\mathcal{B}$.

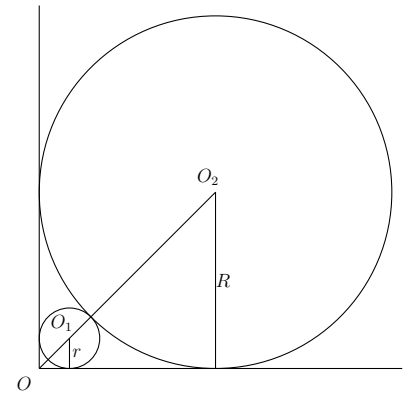


Kết quả:

Để đặt được nhiều đĩa nhất, ta sẽ tham lam, đặt những chiếc đĩa chồng vào nhau, liên tiếp dựa vào lề như sau:



Ta sẽ tìm mối liên hệ giữa bán kính hai chiếc đĩa liên tiếp.



Ta có

$$O_1O_2 = r + R = R\sqrt{2} - r\sqrt{2}.$$

Nên $R \cdot (\sqrt{2} - 1) = r \cdot (\sqrt{2} + 1)$,
dẫn tới

$$R = r \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = r \cdot (3 + 2\sqrt{2}).$$

Vậy tỉ lệ bán kính giữa hai chiếc đĩa liên tiếp đặt lên nhau được là $3 + 2\sqrt{2}$.

Ta có những chiếc đĩa được xếp vào theo công thức như sau:

$$U_i = \left\lceil U_{i-1} \times (3 + 2\sqrt{2}) \right\rceil$$

$$D_i = \left\lfloor D_{i-1} \div (3 + 2\sqrt{2}) \right\rfloor$$

Với $U_1 = 1, D_1 = 1013$. (Ta đặt $D_1 = 1013$ do là **bán kính**).

Từ đó, bán kính những chiếc đĩa tối ưu được đặt vào là $\{1, 6, 35, 204\}$ và $\{1013, 173, 29, 4\}$ đều có cùng độ dài 4. Vậy $\mathcal{B} = 4$. (oops)

Bài 8. (2 điểm) Cho tam giác ABC có độ dài cạnh AB, BC, CA lần lượt là 18, 23, 36 (đơn vị) có đường cao AH. Đường phân giác AD của $\triangle ABC$ cắt đường cao HE của $\triangle AHC$ tại F. a) Tính diện tích $\triangle ABC$. (0,5 điểm) b) Tìm độ dài bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ADC$. (0,75 điểm) c) Tìm độ dài cạnh BF. (0,75 điểm)	Kết quả:
Bài 9. (2 điểm) Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh là 2026. Dựng 3 đường tròn có lần lượt AB, BC, AC là đường kính. a) Tìm độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. (1 điểm) b) Tính diện tích phần gạch sọc. (1 điểm)	Kết quả:
Bài 10. (2 điểm) Dãy Fibonacci xuất hiện nhiều trong tự nhiên, toán học và các bài toán tổ hợp. Nó cũng là cơ sở cho nhiều bài toán về xếp hình, quy hoạch và đếm tổ hợp. Dãy Fibonacci là dãy số được định nghĩa như sau: $F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ với } n \geq 2.$ Tính $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_{50}^2$ khi chia lấy dư cho 20252026.	Kết quả: Truy hồi trực tiếp hoặc sử dụng đẳng thức sau: $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$ Kết quả là: 1333774.

*** HẾT ***

Phan Thành Hưng, Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. HCM.