

Bài tập: Tính $\overbrace{1111 \dots 1111}^{2026 \text{ số } 1}$ chia lấy dư cho 2025. (HSG MTCT, TP. HCM, 2026)

Đặt $S = \overbrace{1111 \dots 1111}^{2026 \text{ số } 1}$.

Cách 1:

Ta có: $S = 10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{2025} = \frac{10^{2026} - 1}{9}$

Vậy ta cần tính $\frac{10^{2026} - 1}{9}$ chia lấy dư cho 2025.

Đặt $x = 10^{2026} - 1, y = 9, m = 2025$. Ta có:

$$\frac{x}{y} \bmod m = \frac{x}{y} - m \left\lfloor \frac{\frac{x}{y}}{m} \right\rfloor = \frac{x}{y} - m \left\lfloor \frac{x}{ym} \right\rfloor = \frac{1}{y} \left(x - ym \left\lfloor \frac{x}{ym} \right\rfloor \right) = \frac{1}{y} (x \bmod ym)$$

Vậy ta cần tính:

$$\frac{1}{9} \cdot ((10^{2026} - 1) \bmod (2025 \cdot 9)) = \frac{(10^{2026} - 1) \bmod 18225}{9}$$

Đưa về bài toán tính dư của lũy thừa cơ bản, ta có kết quả biểu thức trên là: $\frac{7299}{9} = 811$.

Vậy đáp án là: $\boxed{811}$.

Cách 2:

Ta nhận thấy $2025 = 25 \cdot 81$

Ta có $S \equiv 11 \pmod{25}$ do $10^2 \equiv 0 \pmod{25}$.

Mặt khác, vì $10^9 \equiv 1 \pmod{81}$ nên ta có chu kì dư là 9.

Ta có: $10^0 + 10^1 + \dots + 10^8 \equiv 9 \pmod{81}$.

Số chu kì đầy đủ là $2026 \div 9 = 225$, phần dư là 1.

Vậy $S \equiv 9 \times 225 + 10^{2025} \equiv 0 + (10^9)^{225} \equiv 1 \pmod{81}$

Ta có:

$$\begin{cases} S \equiv 11 \pmod{25} \\ S \equiv 1 \pmod{81} \end{cases}$$

Vì $\gcd(25, 81) = 1$ nên tồn tại duy nhất 1 nghiệm theo modulo 2025.

Ta có:

$$25k + 11 \equiv 1 \pmod{81}$$

Vì $25 \cdot 13 \equiv 1 \pmod{81}$ nên

$$25k + 10 \equiv 0 \pmod{81}$$

$$25k \cdot 13 + 130 \equiv 0 \pmod{81}$$

$$k + 49 \equiv 0 \pmod{81}$$

Lấy $k = 81 - 49 = 32$.

Vậy $S \equiv 25 \cdot 32 + 11 = \boxed{811} \pmod{2025}$.

Cách 3:

Chạy đa câu lệnh:

$$x = x + 1 : A = 10A + 1 - 2025 \operatorname{Int}\left(\frac{10A + 1}{2025}\right)$$

Chạy liên tục sẽ thấy với $x = 2$ và $x = 83$ thì A đều có giá trị là 11. Nghĩa là chu kì dư 2025 của đa câu lệnh có độ dài 81, thừa ra một vị trí là $x = 1$. Do đó, số số 1 còn lại là 2025, với phần dư từ $0 \rightarrow 2024$.

Ta có $2024 \bmod 81 = 80$. Ta thực hiện lại đa câu lệnh như trên tới khi $x = 80$, thì được $A = \boxed{811}$.