

Chuyên đề: TÌM KIẾM NHỊ PHÂN – GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG BIẾN

Tác giả: Phan Thành Hưng (PTNK, ĐHQG TP. HCM)

I. Giới thiệu

Cho bài toán sau:

“Giải phương trình:

$$f(x) = C$$

Giả sử phương trình có nghiệm duy nhất trên đoạn $[A, B]$ và $f(x)$ **đồng biến trên đoạn này.**”

II. Thuật toán

1. Tính năng Shift + SOLVE

Đây là cách làm rất đơn giản nhưng lại tương đối hiệu quả, có thể giải được nhiều loại phương trình. Tuy nhiên, có vài trường hợp, máy tính không thể tìm ra được nghiệm.

2. Thuật toán tối ưu (chặt nhị phân)

Lúc này, nếu ta biết hàm $f(x)$ đồng biến trên đoạn chứa nghiệm, ta có thể sử dụng một kỹ thuật khá thú vị, có tên là “tìm kiếm nhị phân” (hay “chặt nhị phân”). Về mặt ý tưởng, ta sẽ liên tục chia nhỏ đoạn chứa nghiệm cho tới khi tìm được đúng vị trí của nghiệm thì thôi.

Ý tưởng khá đơn giản:

- Chọn giá trị chính giữa: $m = \frac{A+B}{2}$
 - ✓ Nếu $f(M) < C$ nghĩa là $M < x$, do hàm f đồng biến, miền giá trị mới là $(M, B]$.
 - ✓ Tương tự, nếu $f(M) > C$ nghĩa là $M > x$, miền giá trị mới là $[A, M)$.
 - ✓ Nếu $f(M) = C$ thì ta đã tìm được nghiệm, kết thúc thuật toán.

Liên tục lặp lại quá trình đó cho tới khi tìm được nghiệm, ta sẽ giải được bài toán một cách nhanh chóng. Do ta chọn giá trị chính giữa nên mỗi lần lặp vùng tìm kiếm sẽ giảm đi một nửa, rất hiệu quả.

Để giải quyết các điều kiện so sánh giữa $f(M)$ và C , ta sẽ xét dấu hiệu của chúng. Nếu $F = f(M) - C > 0$ thì $f(M) > C$. Tương tự, $F < 0$ thì nghĩa là $f(M) < C$. Biểu thức xét dấu là $s = \frac{F}{|F|}$. Nếu F dương thì $s = 1$, ngược lại, $s = -1$.

Nếu $f(M) = C$ sẽ dẫn tới $F = 0$ và biểu thức tính s sẽ gây lỗi chia cho 0 (Math ERROR), trùng hợp lại là chính là lỗi ta cần để dừng vòng lặp. Do vậy ta không cần phải xử lý trường hợp này 0 đó.

Bây giờ, ta cần đưa s về hai giá trị 0/1 để thuận tiện cho việc gán M vào các biến sau này.

Vì $s \in \{-1, 1\}$ nên $D = \frac{s+1}{2} \in \{0, 1\}$ tương ứng. Từ đó, D sẽ là biến cho ta thông tin về việc gán M vào biến A hay B .

Nếu $D = 0$, nghĩa là $s = -1$ tương đương $f(M) < C$, đoạn tìm kiếm mới là $(M, B]$, do vậy, ta gán $A := M$ bằng cách gán $A := DA + (1 - D)M$. Tương tự, ngược lại, nếu $D = 1$ thì ta gán $B := M$, và tránh được việc gán cùng lúc với A bằng cách xử lý biến D ngược lại so với A , cụ thể, ta gán $B := (1 - D)B + DM$.

Ta cứ lặp như vậy tới khi vào trường hợp $f(M) = C$ gây lỗi thì dừng, và nghiệm sẽ nằm trong biến M .

Để cài đặt vào máy tính Casio, ta sẽ làm như sau:

$$A = 0CAMDB + DA + (1 - D)M : B = (1 - D)B + DM : M = \frac{A + B}{2} : F = f(M) - C : D = \frac{\frac{F}{|F|} + 1}{2}$$

- Giá trị đầu: $C =$ vế phải; $A =$ miền dưới của x ; $M =$ miền trên của x ; $D = 1$; $B = 1$;

Đồng thời, thay $f(M)$ thành một biểu thức tạo ra bởi việc thay M vào hàm $f(x)$. VD: nếu $f(x) = x^x$ thì ta thay vào máy tính ở đoạn $f(M)$ thành M^M .

- Cách dùng: nhập các dữ liệu vào theo đề bài, sau đó lặp đa câu lệnh cho tới khi gặp "Lỗi phép tính" (Math ERROR) thì dừng. Kết quả (nghiệm phương trình) nằm trong biến M .

Phân tích độ hiệu quả: Mỗi lần thực hiện đa câu lệnh, ta liên tục chọn giá trị chính giữa vùng tìm kiếm, rồi loại bỏ đi một nửa không cần sử dụng. Do vậy, vùng tìm kiếm sẽ giảm đi một nửa sau mỗi vòng lặp. Nếu duyệt qua k vòng lặp thì kích thước vùng tìm kiếm là $\frac{R-L}{2^k}$. Nếu ta chấp nhận sai số là ϵ thì $\frac{R-L}{2^k} \leq \epsilon$, nghĩa là số vòng lặp sẽ là khoảng $\log_2 \left(\frac{R-L}{\epsilon} \right)$, rất hiệu quả. Thông thường, đề bài sẽ yêu cầu làm tròn tới d chữ số phần thập phân, điều đó thực chất tương đương với $\epsilon = 10^{-d}$.

Bài tập ứng dụng:

Giải phương trình sau:

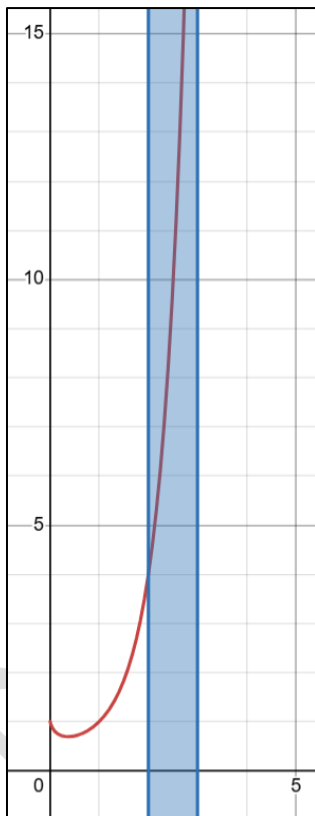
1. $x^x = 15$

Lời giải mẫu:

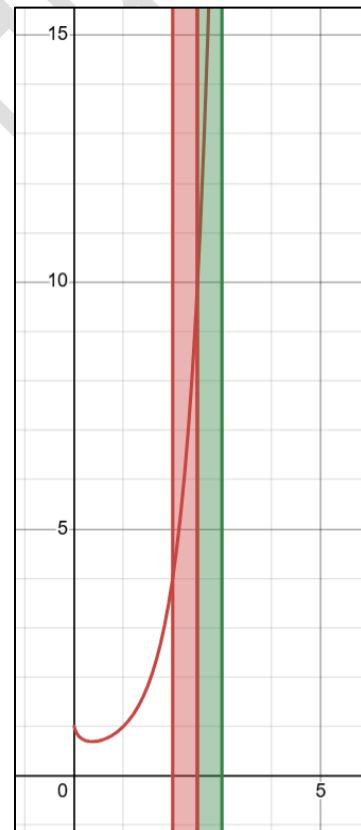
Nếu ta dùng tính năng Shift + SOLVE, máy tính sẽ báo không giải được (Cannot Solve). Do vậy, ta cần cách làm khác. ~~Ngoài ra còn cách khá là cute đó là biến đổi phương trình để sử dụng hàm Lambert W (W = Wtf???)~~.

Không khó để thấy đoạn chứa nghiệm là $[1, 3]$ vì $1^1 \leq 15 \leq 3^3$ và $f(x) = x^x$ đồng biến trên đoạn này vì x là số nguyên dương. Fun fact: hãy thử chứng minh $f(x)$ thực chất đồng biến trên đoạn $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Do vậy, ta có thể áp dụng thuật toán tìm kiếm nhị phân trên đoạn $[1, 3]$ để giải quyết bài toán.



Bên trái là miền giá trị của x (vùng tìm kiếm) ban đầu. Hình bên phải là sau vòng lặp 1, ta loại bỏ phần màu đỏ đi và tiếp tục tìm kiếm sâu hơn vào vùng màu xanh lá.



Tại vùng màu xanh lá (lát cắt tại $y = 15$), ta lại tiếp tục chọn vị trí giữa và chia thành 2 vùng tiếp. Lặp lại như vậy cho tới khi ta tìm được nghiệm thì thôi.



Sau khi bấm khoảng 1 phút, máy tính báo lỗi Math ERROR, ta dừng thuật toán và lấy kết quả ra từ biến M .

Kết quả là: **2,71316360400393**.

Đây là đáp án chuẩn: **2,713163604004239209576401 ...**

Có thể thấy, chênh lệch không nhiều, và có thể chấp nhận được trong đề thi HSG MTCT.

2. $x^x = 363636$
3. $x^{\sqrt{x}} = 676767$
4. $(x^x + 1)^x = 369420$
5. $x^{x^x} = 1,36$
6. $\frac{x^x}{36x} = 18,75$
7. $\frac{x^x}{x^2 - x + 1} = 36,67$
8. $x^x = 0,76$

Lưu ý: Phương trình (8) này có hai nghiệm. Vùng tìm kiếm lần lượt là $\left[0.01, \frac{1}{e}\right]$ và $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

Thực chất trong vùng tìm kiếm đầu tiên $f(x)$ nghịch biến, nên ta phải đảo ngược khúc $F = f(M) - C$ trong phần cài đặt thành $F = C - f(M)$ để xử lý nghịch biến.

9. $x = \cos\left(\frac{x}{x^2+1} + \sin x\right)$ (đơn vị góc: **độ**, sigma không dùng Shift + SOLVE)
10. $\sqrt{x} + \frac{1}{x}$, với $x > 1$
11. $\frac{\arctan x}{x} = 1,875$
12. $\sqrt[9999]{\sqrt{x}} = 5\pi^{\frac{\sqrt{x}}{36}} + 1$
13. $18^x = x^{36} + 3,6$ với $0 < x \leq 1$
14. $\frac{18}{x} - \frac{36}{2x+1} + \frac{18}{5\pi x} = 0,367$ với $3,6 < x < 36$

TÓM TẮT THUẬT TOÁN:

$$A = 0CAMDB + DA + (1 - D)M : B = (1 - D)B + DM : M = \frac{A + B}{2} : F = f(M) - C : D = \frac{\frac{F}{|F|} + 1}{2}$$

- Giá trị đầu: $C =$ vế phải; $A =$ miền dưới của x ; $M =$ miền trên của x ; $D = 1$; $B = 1$;

Đồng thời, thay $f(M)$ thành một biểu thức tạo ra bởi việc thay M vào hàm $f(x)$. VD: nếu $f(x) = x^x$ thì ta thay vào máy tính ở đoạn $f(M)$ thành M^M .

- Cách dùng: nhập các dữ liệu vào theo đề bài, sau đó lặp đa câu lệnh cho tới khi gặp “Lỗi phép tính” (Math ERROR) thì dừng. Kết quả (nghiệm phương trình) nằm trong biến M .