

Tuyển tập các bài tập thú vị luyện thi HSG MTCT

Bài tập:

Cho các chữ số a, b sao cho $M = \overline{2a8b9}$ có số lượng ước dương là một số nguyên tố lẻ. Tính $a^2 + b^2$.

Lời giải:

Do M có lượng ước lẻ nên M là số chính phương, ta có $145 \leq \sqrt{M} \leq 172$.

Do M có lượng ước dương là một số nguyên tố, nghĩa là M có dạng:

$$M = (p^q)^2$$

Với p và $2q + 1$ là một số nguyên tố.

⇒ Ta kiểm tra các số là lũy thừa của một số nguyên tố trong đoạn $[145; 172]$, phát hiện chỉ có duy nhất $\sqrt{M} = 167$ thỏa.

⇒ $M = 27889$

⇒ $a = 7; b = 8$.

Đáp án: **113**

Bài tập:

Gọi $f(x)$ là tổng các ước dương của x

Ví dụ, $f(4) = 1 + 2 + 4 = 7$

Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(2026)$.

Lời giải:

Thay vì tính trực tiếp, ta làm ngược lại: với mỗi số x , đếm xem có bao nhiêu lần nó xuất hiện trong kết quả (kỹ thuật này gọi là “đóng góp vào tổng”).

Số lượng số trong đoạn từ 1 tới 2026 có x là ước là $\left\lfloor \frac{2026}{x} \right\rfloor$

⇒ Vậy mỗi x đóng góp $\left\lfloor \frac{2026}{x} \right\rfloor$ lần vào kết quả

Kết quả là:

$$\sum_{x=1}^{2026} \left(x \times \text{Int} \left(\frac{2026}{x} \right) \right)$$

Bài tập:

Gọi $f(x)$ là số nguyên dương nhỏ nhất không phải ước của x .

Ví dụ, $f(6) = 4, f(1) = 2, f(5) = 2$

Tính $f(1) + f(2) + \dots + f(2026)$.

Lời giải:

Cũng áp dụng tư duy đóng góp vào tổng như bài trên nhưng khó hơn ;-; (aka. tác giả lười viết)

Bài tập:

Tìm dư của $\overline{1234567891011121314151617 \dots 100101}$ chia lấy dư cho 2026.

Lời giải:

Đặt $N_x = \overline{123567 \dots x}$ (x là một số nguyên dương, có thể có nhiều chữ số)

Ta có:

$$N_{x+1} = N_x \times 10^d + x \text{ với } d \text{ là số chữ số của } x, \text{ mà } d = \lfloor \log_{10} x \rfloor + 1$$

Vậy công thức truy hồi là:

$$\begin{cases} N_0 = 0 \\ N_x = N_{x-1} \times 10^{\text{Intg}(\log_{10}(x))+1} + x \end{cases}$$

Sử dụng đa câu lệnh để truy hồi, đồng thời trong quá trình tạo N_x liên tục chia lấy dư cho 2026 bằng cách sau: $a \bmod b = a - b \times \text{Intg}\left(\frac{a}{b}\right)$

Bài tập:

Tìm dư của $3^{2025} + 3^{2026} + 3^{2027} + \dots + 3^{123456789}$ chia lấy dư cho 29297

Lời giải:

Do 29297 là số nguyên tố, áp dụng định lý Fermat nhỏ, ta có $2^{29296} \equiv 1 \pmod{29297}$

Ta có:

$$3^{2025} + 3^{2026} + 3^{2027} + \dots + 3^{123456789}$$

$$= \frac{3^{123456790} - 3^{2025}}{2} \times 1$$

$$\equiv \frac{3^{123456790} - 3^{2025}}{2} \times 2^{29296}$$

$$= (3^{123456790} - 3^{2025}) \times 2^{29295} \pmod{29297}$$

Chia nhỏ thành 3 bài toán tìm dư của lũy thừa và gộp lại, ta được kết quả là 8940.

Bài tập:

Giải tìm x (làm tròn tới 6 chữ số thập phân):

- a) $x^{\sqrt{x}} = 696969$
- b) $x^{x+\sqrt{x}} = 696969$

Lời giải:

Dự đoán $x^{\sqrt{x}}$ và $x^{x+\sqrt{x}}$ đồng biến trên đoạn có nghiệm, ta ước tính nghiệm và dùng kĩ thuật tìm kiếm nhị phân để giải phương trình đồng biến.

Bài tập:

Tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 2026]$, biết:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2026x - 2025}{2027x + 5}$$

Tức là, tìm $\max_{0 \leq x \leq 2026} f(x)$.

(làm tròn tới 9 chữ số thập phân)

Lời giải:

Cực trị của phân thức.

Bài tập:

Gọi A là số nguyên lớn nhất không lớn hơn $(9 + 4\sqrt{5})^{100}$. Tìm 4 chữ số cuối của A .

Lời giải:

lười viết

Bài tập:

Đường viền trang trí ở nền nhà của Hưng có kích thước 2×36 (2 hàng, 36 cột) được lát bằng các loại gạch: loại kích thước 1×2 , 2×1 và 2×2 . Hãy xác định số cách lát khác nhau có thể thực hiện để lát hết toàn bộ nền nhà.

Ví dụ, sau đây là một cách lát hợp lệ với nền nhà kích thước 2×10 :



Lời giải:

Gọi $f(x)$ là tổng số cách lát nền nhà kích thước $2 \times x$.

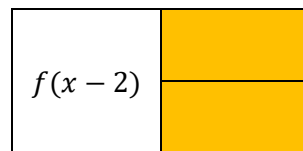
TH1:

Xét tới x , giả sử ta đặt viên gạch 2×2 vào $\Rightarrow$ số cách đặt là $f(x - 2)$



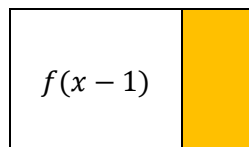
TH2:

Giả sử ta đặt viên gạch 2×1 (ngang) vào $\Rightarrow$ bắt buộc phải đặt thêm 1 viên gạch 2×1 cùng nó $\Rightarrow$ số cách đặt là $f(x - 2)$



TH3:

Giả sử ta đặt viên gạch 1×2 (dọc) vào $\Rightarrow$ số cách đặt là $f(x - 1)$.



Trường hợp cơ sở: với $x = 0$, ta có 1 cách đặt (là không đặt viên gạch nào), với $x = 1$, ta có 1 cách đặt (1 viên gạch dọc).

Vậy ta có: $f(x) = 2f(x-2) + f(x-1)$, với $f(0) = f(1) = 1$. Kết quả là $f(26) = \mathbf{44739243}$.

Bài tập:

Vào một ngày đẹp trời, bạn Hưng quyết định đào 2026 ô trống, các ô được đánh số thứ tự lần lượt từ 1 tới 2026. Sau đó, Hưng lần lượt bỏ kho báu của mình vào trong từng ô một qua nhiều lượt theo quy tắc sau.

Ở lượt đầu tiên, Hưng bỏ kho báu vào các ô có số thứ tự là bội của 2. Ở lượt tiếp theo, Hưng bỏ kho báu vào các ô có số thứ tự là bội của 3. Lượt thứ ba, Hưng bỏ kho báu vào các ô có số thứ tự là bội của 5. Ở lượt cuối cùng, Hưng bỏ kho báu vào các ô có số thứ tự là bội của 8.

Lưu ý rằng một ô chỉ có thể có một trong hai trạng thái: ô trống hoặc ô có chứa kho báu!

- Sau cùng, có bao nhiêu ô có chứa kho báu? (1,5 điểm)
- Trước khi thực hiện các lượt bỏ kho báu trên vào 2026 ô có sẵn, Hưng cần đào thêm ít nhất bao nhiêu ô trống (đánh số tiếp tục từ 2027) để sau cùng, số ô có chứa kho báu là 2026? (0,5 điểm)

Lời giải:

- Nguyên lý bao hàm - loại trừ, kết quả là **1486**.
- Do số ô càng nhiều thì số ô chứa kho báu càng nhiều, ta có thể liên tục thử các số cho tới khi số ô chứa kho báu là 2026 và số ô là nhỏ nhất rồi lấy hiệu là xong. Kết quả là **737**.

Bài tập:

Tính:

$$1 - 2 - 3 + 4 + 5 + 6 - 7 - 8 - 9 - 10 + \dots - 2026$$

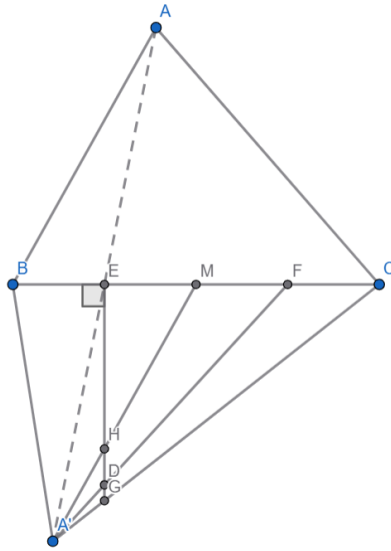
(1 dấu +, 2 dấu -, 3 dấu +, 4 dấu -, ...)

Lời giải:

$$-\sum_{x=1}^{2026} \left((-1)^{-\text{Intg}\left(\frac{\sqrt{8x+1}-1}{2}\right)} \times x \right)$$

Bài tập:

Cho ΔABC có $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm, BC có độ dài nguyên và là một số chính phương có tích các ước dương là một số lẻ. E, M, F là ba điểm thuộc BC sao cho $BE = EM = MF = FC$. A' là điểm đối xứng với A qua E . Từ E dựng đường vuông góc với BC cắt $A'M, A'F, A'C$ lần lượt tại H, D, G .



- Tính diện tích tam giác $BA'C$. (0,75 điểm)
- Tính giá trị $S_{EHM} + S_{BEGA'}$ (0,75 điểm)
- Tính tỉ số $\frac{GD}{DH}$ (làm tròn tới 3 chữ số thập phân). (0,5 điểm)

Bài tập:

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm. M là trung điểm BC . Đường tròn tâm O tiếp xúc với ba cạnh của ΔAMD . Gọi F là tiếp điểm giữa (O) và tiếp tuyến AM , kẻ đoạn thẳng DF .

Tính diện tích phần được tô đen (trong hình), làm tròn kết quả tới 6 chữ số thập phân.

